Sur la corrélation d'une série d'impulsions avec temps mort

par Jörg W. Müller

Bureau International des Poids et Mesures

Nous supposons que le processus original de comptage a été transformé dans une fonction x(t) à deux valeurs +1 et -1, comme nous l'avons décrit auparavant [1]. Les changements d'états du processus secondaire se produisent au moment de l'arrivée d'une impulsion. La fonction d'autocorrélation est alors définie par l'espérance

$$R(\delta) = E\left\{x(t) \cdot x(t+\delta)\right\} , \tag{1}$$

où la nouvelle variable δ est le retard introduit artificiellement.

Tandis que la détermination de $R(\delta)$ pour un processus de Poisson, dont le taux de comptage est ρ , est facile et donne une simple exponentielle $R(\delta) = \exp(-2\rho|\delta|)$, le calcul est beaucoup plus compliqué si le processus a été perturbé par l'insertion d'un temps mort τ du type non cumulatif. Pourtant, le problème a été traité il y a quelques années déjà par Landaud [2]. A part quelques formules de récurrence, dont l'application n'est pas toujours facile, cet auteur finit par indiquer une formule approximative pour le cas $\rho\tau \ll 1$, qui serait

$$R(\delta) = e^{-2\rho(1+\rho\tau)\delta} . \tag{2}$$

Cette équation lui a servi à déterminer expérimentalement le produit $\rho\tau$ à partir de $R(\delta)$, ce qui revient pratiquement à une mesure du temps mort τ .

Cependant, la méthode de dérivation pour (2) ne nous a pas semblé très satisfaisante, et c'est en particulier le début de la fonction qui serait

$$R(\delta) \approx 1 - 2\rho(1+\rho\tau)\delta \qquad \text{pour} \quad \rho\delta \ll 1 ,$$

qui nous a paru douteux. Il nous semblait que l'expression rigoureuse pour les probabilités d'un processus de Poisson stationnaire, déformé par la présence d'un temps mort, que nous avions calculée récemment, devrait se prêter à une détermination exacte de la fonction $R(\delta)$, au moins pour de petits retards δ .

Introduisons d'abord les abréviations suivantes:

$$x = \rho \cdot \tau \quad , \qquad \lambda = \frac{1}{1+x} \quad , \qquad \mu = \rho \cdot |\delta| \quad ,$$

de même que

$$T_k = \rho\,(|\delta| - k \cdot \tau) = \mu - k \cdot x \qquad \text{et}$$

$$P_k(j) = \frac{T_k^j}{j\,!} \cdot e^{-T_k} \quad , \qquad \text{avec} \quad 0 \leqslant j < k \ .$$

La probabilité $W_k(\delta)$ d'observer exactement k impulsions dans un intervalle de temps δ , dont le début est choisi au hasard, est alors donnée par [3]

$$\begin{aligned} W_k(\delta) = \lambda \Bigg[& U(T_{k-1}) \sum_{j=0}^{k-2} (k-1-j) \cdot P_{k-1}(j) \\ & - 2\, U(T_k) \sum_{j=0}^{k-1} (k-j) \cdot P_k(j) \\ & + U(T_{k+1}) \sum_{j=0}^{k} (k+1-j) \cdot P_{k+1}(j) + \Delta_k(t) \Bigg] \ , \end{aligned} \tag{3}$$

où

$$U(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad x < 0 \\ 1 & \text{"} \quad x > 0 \end{cases} \quad ,$$

K est le plus grand nombre entier pour lequel

$$|\delta| > K \cdot \tau \qquad \text{et}$$

$$\Delta_k(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad k \leqslant K-1 \\ (K+1) \cdot (1+x) - \mu & \text{"} \quad k = K \\ \mu - K \cdot (1+x) & \text{"} \quad k = K+1 \ . \end{cases}$$

Puisque pour notre choix de $x(t)$ la corrélation s'exprime par la somme

$$R(\delta) = \sum_{k=0}^{K+1} (-1)^k \cdot W_k(\delta) \quad , \tag{4}$$

la détermination de $R(\delta)$ est essentiellement équivalente à celle des probabilités $W_k(\delta)$. En raison de la complexité de ces expressions, le problème paraissait d'abord bien décourageant pour une valeur élevée de K.

La formule générale pour $W_k(\delta)$ nous permet d'attendre que R pourrait se prêter à un développement du type

$$R_K(\delta) \sim \sum_{k,j} C_K(k,j) \cdot P_k(j) + D(K) \ ,$$

où $C_K(k,j)$ et $D(K)$ sont des coefficients inconnus. La détermination explicite de $R_K(\delta)$ pour les valeurs K de 0 à 4 a fait apparaître, à notre surprise, une simple régularité dans les coefficients qui se reconnaît dans le tableau suivant.

k	$C_K(k,j)$: j=0	1	2	3
1	4			
2	- 8	- 4		
3	12	8	4	
4	- 16	- 12	- 8	- 4
...	...			

K	D(K)
0	$1/\lambda - 2\mu$
1	$-3/\lambda + 2\mu$
2	$5/\lambda - 2\mu$
3	$-7/\lambda + 2\mu$
4	$9/\lambda - 2\mu$
...	...

C se révèle donc indépendant de K. Par conséquent, il était facile de deviner la formule de R pour un K général, c'est-à-dire pour n'importe quel décalage δ, qui serait alors

$$R_K(\delta) = \lambda \left[4 \sum_{k=1}^{K} (-1)^{k-1} \sum_{j=0}^{k-1} (k-j) \cdot P_k(j) + (-1)^K \left(\frac{2K+1}{\lambda} - 2\mu \right) \right] . \quad (5)$$

Au moyen d'un raisonnement par récurrence (induction complète) nous avons finalement réussi à démontrer l'exactitude de cette hypothèse (voir Annexe 1). En particulier, on déduit maintenant de la formule générale (5), pour K=0, c'est-à-dire pour l'intervalle $0 < |\delta| \leq \tau$, que R décroît de manière strictement linéaire

$$R_o(\delta) = 1 - 2\lambda\mu = 1 - \frac{2\rho|\delta|}{1+\rho\tau} \ . \quad (6)$$

Cela montre que l'approximation (2) est effectivement fausse dans ce domaine car, en réalité, l'effet d'un temps mort est plutôt de diminuer la pente que de la renforcer. La fonction de corrélation pour de petits retards est donc déterminée par le taux de comptage effectif $\rho_{eff} = \lambda \cdot \rho$, comme il fallait s'y attendre. Néanmoins, la formule (2) peut être très utile, non pas pour $x \ll 1$, comme on l'avait affirmé dans [2] , mais plutôt pour $|\delta| \gg \tau$. Bien que nous n'ayons pas encore réussi à traiter le cas limite pour $K \gg 1$ de manière rigoureuse, on peut fonder cette affirmation sur un autre raisonnement.

Comme nous l'avons montré il y a longtemps [4] , une approximation de la formule de Poisson, pour le cas où celle-ci est modifiée par un temps mort τ, peut se baser sur un développement en puissances de τ/δ, de sorte que

$$W_k(\delta) = P_o(k) \left[\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\tau}{\delta}\right)^i \cdot \alpha_i(k) \right] , \qquad (7)$$

où les α_i sont des coefficients à déterminer. Si l'on se contente du premier terme qui inclut l'effet du temps mort, on obtient

$$W_k(\delta) \approx P_o(k) \left[1 + \frac{x}{\mu} \cdot k(\mu - k + 1) \right] . \qquad (8)$$

Par un petit calcul, qui est reproduit dans la seconde partie de l'annexe, on en déduit pour la fonction de corrélation l'expression

$$R(\delta) \approx e^{-2\mu/\lambda} = e^{-2\rho(1+\rho\tau)\cdot|\delta|} ,$$

ce qui est identique à la formule (2) proposée par Landaud. Celle-ci est donc la forme limite pour $|\delta| \gg \tau$, où les termes supérieurs de (7) sont négligeables.

Dans la figure 1, qui montre le résultat d'une petite série de mesures de la fonction de corrélation $R(\delta)$, on indique la déviation par rapport à la ligne droite initiale donnée par (6). On en déduit que la nouvelle formule (5) est très bien vérifiée par les mesures expérimentales.

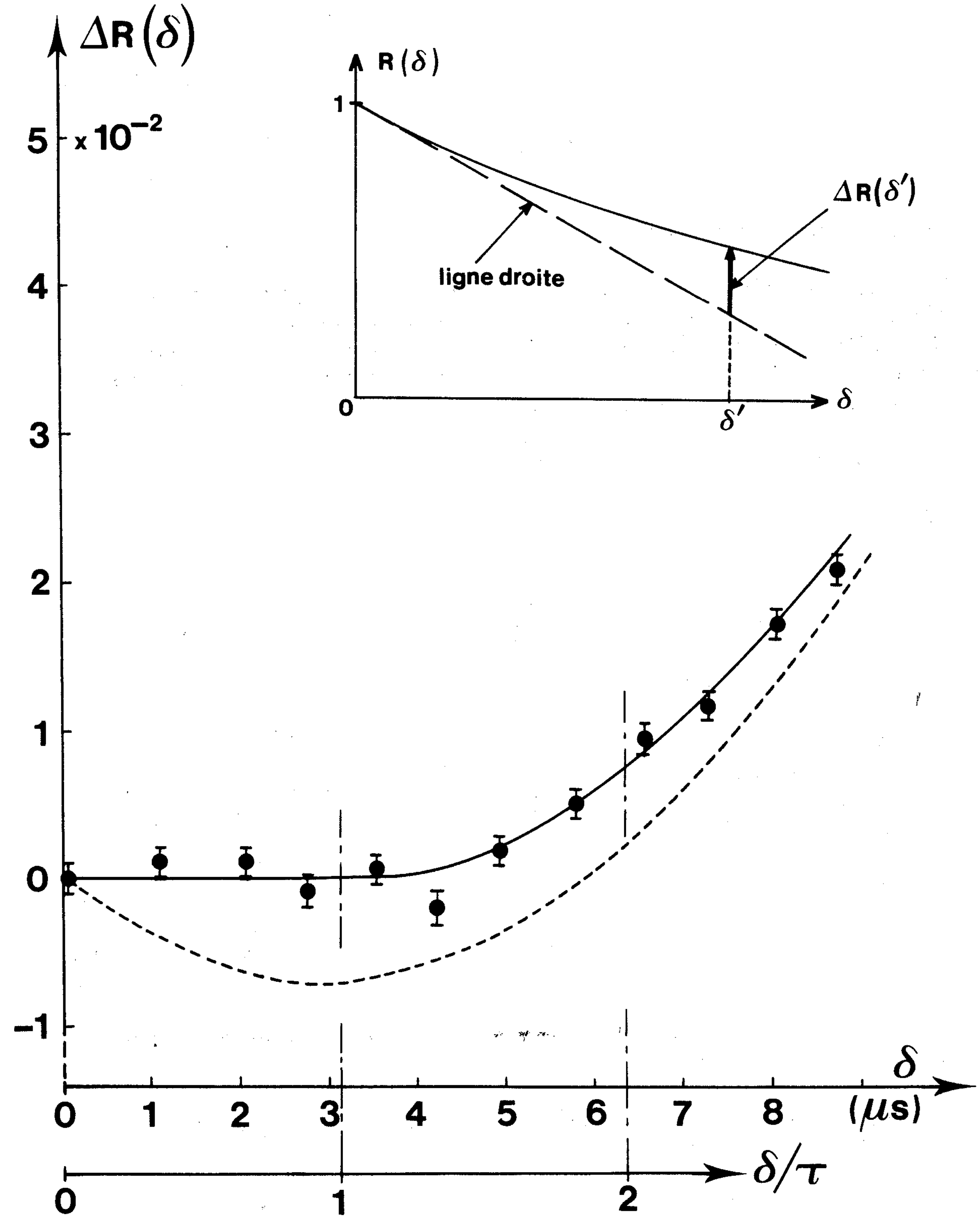

Fig. 1. Mesure expérimentale de l'autocorrélation R en fonction du retard δ pour un processus de Poisson avec $\rho \approx 20 \times 10^3\ s^{-1}$, perturbé par un temps mort de $\tau \approx 3{,}2\mu s$. $\Delta R(\delta)$ représente l'écart par rapport à la ligne droite $R_o(\delta) = 1 - 2\lambda\mu$.

– – – – : forme asymptotique

——— : distribution exacte

Annexe

1. Dérivation de la formule (5)

La preuve qui suit se base sur un raisonnement par récurrence. Pour une explication lucide de cette méthode on consultera [5]. Considérons la formule que nous cherchons à démontrer comme une fonction de K. En la supposant correcte pour une certaine valeur de K, on va démontrer qu'elle reste valable pour K+1.

Formons à partir de (5) la différence

$$D_K \equiv R_{K+1} - R_K$$

$$= \lambda \left\{ 4\,(-1)^K \sum_{j=0}^{K} (K+1-j) \cdot P_{K+1}(j) - (-1)^K \left[\left(\frac{2K+3}{\lambda} - 2\mu\right) + \left(\frac{2K+1}{\lambda} - 2\mu\right) \right] \right\}$$

$$= 4\,\lambda\,(-1)^K \left\{ \sum_{j=0}^{K} (K+1-j) \cdot P_{K+1}(j) + \mu - \frac{K+1}{\lambda} \right\},$$

ou

$$H_K \equiv (-1)^K \cdot \frac{1}{\lambda} \cdot D_K = \sum_{j=0}^{K} (K+1-j) \cdot P_{K+1}(j) + \mu - \frac{K+1}{\lambda}. \qquad \text{(A1)}$$

Maintenant, cette même différence est déterminée en partant de l'équation (4). On a

$$R_K = W_o - W_1 \pm \ldots + (-1)^K \cdot W_K + (-1)^{K+1} \cdot W_{K+1},$$

et de façon analogue

$$R_{K+1} = W'_o - W'_1 \pm \ldots + (-1)^K \cdot W'_K + (-1)^{K+1} \cdot W'_{K+1} + (-1)^{K+2} \cdot W'_{K+2},$$

où les primes nous rappellent que les probabilités W'_k se réfèrent à K+1. Or, comme le montre la formule (3), W_k ne dépend de K que par l'intermédiaire du terme Δ_k, et il en est donc indépendant pour $k \leqslant K-1$.

Par conséquent, il suffit de prendre en considération les derniers termes (à partir de $k = K$). D'où

$$H_K = (-1)^K \cdot \frac{1}{\lambda} \cdot (R_{K+1} - R_K)$$

$$= \frac{1}{\lambda} \left[(W'_K - W'_{K+1} + W'_{K+2}) - (W_K - W_{K+1}) \right] . \qquad \text{(A2)}$$

En insérant la formule générale (3) on obtient

$$H_K = \sum_{j=0}^{K-2} (K-1-j) \cdot P_{K-j}(j) - 2 \sum_{0}^{K-1} (K-j) \cdot P_K(j) + \sum_{0}^{K} (K+1-j) \cdot P_{K+1}(j)$$

$$- \left[\sum_{0}^{K-1} (K-j) \cdot P_K(j) - 2 \sum_{0}^{K} (K+1-j) \cdot P_{K+1}(j) - \mu + \frac{K+2}{\lambda} \right]$$

$$+ \sum_{0}^{K} (K+1-j) \cdot P_{K+1}(j) + \mu - \frac{K+1}{\lambda}$$

$$- \left[\sum_{0}^{K-2} (K-1-j) \cdot P_{K-1}(j) - 2 \sum_{0}^{K-1} (K-j) \cdot P_K(j) - \mu + \frac{K+1}{\lambda} \right]$$

$$+ \sum_{0}^{K-1} (K-j) \cdot P_K(j) + \mu - \frac{K}{\lambda}$$

$$= 4 \left\{ \sum_{j=0}^{K} (K+1-j) \cdot P_{K+1}(j) + \mu - \frac{K+1}{\lambda} \right\} .$$

Parce que cette expression est identique à (A1), la preuve de la formule (5) par récurrence est complète.

2. La fonction de corrélation pour $K \gg 1$

En utilisant pour la probabilité d'observer k événements dans un temps δ l'expression rapprochée donnée par (8), l'expression (4) nous amène à

$$R(\delta) \approx \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot P_o(k) + \frac{x}{\mu} (1+\mu) \sum_k (-1)^k \cdot k \cdot P_o(k)$$

$$- \frac{x}{\mu} \sum_k (-1)^k \cdot k^2 \cdot P_o(k) . \qquad \text{(A3)}$$

Pour évaluer des sommes du type

$$Z_r \equiv \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot k^r \cdot P_o(k) \tag{A4}$$

on a avantage à utiliser la décomposition [6]

$$k^r = \sum_{j=1}^{r} S(r,j) \cdot k_{(j)} , \qquad r = 1, 2, \dots , \tag{A5}$$

où $k_{(j)} \equiv k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot \dots \cdot (k-j+1)$

et $S(r,j)$ est un nombre de Stirling de deuxième espèce.

En insérant $P_o(k) = (\mu^k/k!) \cdot \exp(-\mu)$, cela nous amène à

$$Z_r = e^{-\mu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\mu)^k}{k!} \sum_{j=1}^{r} S(r,j) \cdot k_{(j)}$$

$$= e^{-\mu} \sum_{j=1}^{r} S(r,j) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\mu)^k}{(k-j)!} = e^{-\mu} \sum_{j=1}^{r} S(r,j) \cdot (-\mu)^j \sum_{t=-j}^{\infty} \frac{(-\mu)^t}{t!} .$$

Mais puisque $\frac{1}{(-j)!} = 0$, on obtient

$$Z_r = e^{-2\mu} \left[\sum_{j=1}^{r} S(r,j) \cdot (-\mu)^j \right] , \quad \text{pour } r \geqslant 1 . \tag{A6}$$

On a donc

$$Z_0 = e^{-2\mu} ,$$

$$Z_1 = -\mu \cdot e^{-2\mu} ,$$

$$Z_2 = \mu(\mu - 1) \cdot e^{-2\mu} ,$$

$$Z_3 = -\mu(\mu^2 - 3\mu + 1) \cdot e^{-2\mu} , \quad \text{etc.}$$

Nous en déduisons pour la forme limite (A3) de la fonction de corrélation

$$R(\delta) \approx Z_0 + \frac{x}{\mu}(1+\mu) Z_1 - \frac{x}{\mu} Z_2$$

$$= e^{-2\mu} \left[1 - \frac{x}{\mu}(1+\mu)\mu - \frac{x}{\mu} \cdot \mu(\mu - 1) \right]$$

$$= e^{-2\mu} (1 - 2x \cdot \mu) . \tag{A7}$$

Pour $x\mu \ll 1$, ceci s'écrit aussi comme

$$R(\delta) \approx e^{-2(1+x)\mu} ,$$

forme qui correspond à (2) .

Références

[1] J.W. Müller: "Etude de comptages à l'aide d'un corrélateur", Rapport BIPM-70/6 (Juillet 1970)

[2] G. Landaud: "Calcul d'une fonction de corrélation pour l'étude d'un temps mort de détecteur", Comptes rendus 256, 1733 (1963)

[3] J.W. Müller: "Summary of formulae for the dead-time-distorted Poisson distribution", Report BIPM-110 (September 1970)

[4] J.W. Müller: "Influence du temps mort sur la répartition du nombre d'impulsions enregistrées", Rapport BIPM-67/2 (Janvier 1967)

[5] G. Pólya: "How to solve it" (Princeton UP, Princeton, 1944)

[6] "Handbook of Mathematical Functions" (ed. by M. Abramowitz and I.A. Stegun), NBS, AMS 55 (GPO, Washington, 1964), chapitre 24.

(Décembre 1970)