Espérance et variance pour une source décroissante avec temps mort non cumulatif

par Jörg W. Müller

Bureau International des Poids et Mesures, F-92310 SEVRES

Le problème des mesures répétées, à durée fixe t_o, qui s'étendent sur un intervalle de temps T comparable à la période de la source radioactive, tel que nous l'avons décrit récemment, a été poursuivi activement.

L'application de cette méthode à des mesures pratiques nous a obligés d'adapter ses bases théoriques à une situation expérimentale plus générale qui tient compte de la présence d'un mouvement propre et d'un temps mort. Dans ce cas, le taux de comptage à considérer est maintenant de la forme

$$\rho(t) = \frac{\beta + \rho_o \cdot e^{-\lambda t}}{1 + (\beta + \rho_o \cdot e^{-\lambda t})\,\tau} \quad ,$$

où β est le taux dû au mouvement propre et $1/\lambda$ la vie moyenne de la source. Le temps mort τ est supposé du type non cumulatif.

Vu la complexité des calculs on s'est limité à évaluer l'espérance (E) et la variance (V) du nombre k d'événements enregistrés pendant des intervalles t_o qui s'échelonnent sur une durée T. Les expressions correspondantes pour les probabilités ${}_\lambda P(k)$ semblent pour le moment inaccessibles.

A un moment t donné, l'espérance de k est évidemment

$$E_t(k) = \rho(t) \cdot t_o \; .$$

Puisque l'arrivée des impulsions, y compris celles provenant du mouvement propre, forme à tout instant t un processus de Poisson, la variance de ce processus perturbé par un temps mort est donnée en très bonne approximation (voir NIM 112 (1973), 47, eq. 33) par l'expression asymptotique

$$V_t(k) = \frac{\rho(t) \cdot t_o}{[1 + \rho(t) \cdot \tau]^3} \; .$$

En effet, on vérifie aisément que les termes correctifs, qui sont négligés ici, seraient par rapport à 1 tout au plus de l'ordre de $\rho_o \tau^2 / t_o$, ce qui correspond pour des conditions expérimentales utilisées à moins de 10^{-6}.

Puisque de façon générale

$$V_t(k) = E_t(k^2) - E_t^2(k) ,$$

on obtient, en moyennant sur la durée T,

$$_\lambda V(k) = {}_\lambda\left\{E_t(k^2)\right\} - {}_\lambda\left\{E_t(k)\right\}^2 = \frac{1}{T}\int_0^T \left\{V_t(k) + E_t^2(k)\right\} dt - \left\{\frac{1}{T}\int_0^T E_t(k)\, dt\right\}^2 .$$

En insérant les expressions précédentes et en utilisant les abbréviations

$$\mu_o = \rho_o t_o, \quad g = \beta t_o , \quad a = 1 + \beta\tau \quad \text{et} \quad b = \rho_o \tau ,$$

on trouve

- pour l'espérance de k:

$$_\lambda E(k) = \frac{1}{T}\int_0^T \left(\frac{g + \mu_o \cdot e^{-\lambda t}}{a + b \cdot e^{-\lambda t}}\right) dt,$$

- pour la variance de k:

$$_\lambda V(k) = \frac{1}{T}\int_0^T \left\{\frac{g + \mu_o \cdot e^{-\lambda t}}{(a + b \cdot e^{-\lambda t})^3} + \left[\frac{g + \mu_o \cdot e^{-\lambda t}}{a + b \cdot e^{-t}}\right]^2\right\} dt - {}_\lambda E^2(k) .$$

Avec la nouvelle variable $x = e^{-\lambda t}$, toutes les intégrales sont du type

$$\int \frac{x^m \, dx}{(a + bx)^n} , \quad \text{avec} \quad m = -1, 0, 1 \ \text{et} \ n = 1, 2, 3.$$

Leur évaluation est élémentaire, mais fastidieuse. Nous nous contentons de donner les expressions générales pour l'espérance et pour la variance de k auxquelles on arrive après un long travail d'arrangement. L'écriture s'allège un peu par l'emploi des abbréviations suivantes:

$$\vartheta = \lambda T, \quad a' = a\, e^{+\vartheta}, \quad b' = b\, e^{-\vartheta}, \quad \tilde{\mu} = \mu_o/b \quad \text{et} \quad \tilde{g} = g/a .$$

Pour le cas d'un temps mort non cumulatif, les résultats peuvent être décrits sous la forme suivante

- pour l'espérance:

$$_{\lambda}E(k)\cdot\vartheta = \tilde{\mu}\left[\ln(a+b) - \ln(a+b')\right] + \tilde{g}\left[\ln(a'+b) - \ln(a+b)\right] ,$$

- pour la variance:

$$_{\lambda}V(k)\cdot\vartheta = \frac{1}{2}(\tilde{\mu}-\tilde{g})\left[\frac{1}{(a+b')^2} - \frac{1}{(a+b)^2}\right]$$

$$- (\tilde{\mu}^2 a + \frac{\tilde{g}}{a} + \tilde{g}^2 a - 2\tilde{g}a\tilde{\mu})\left[\frac{1}{a+b'} - \frac{1}{a+b}\right]$$

$$+ \tilde{\mu}^2\left[\ln(a+b) - \ln(a+b')\right]$$

$$+ \tilde{g}\,(\frac{1}{a^2} + \tilde{g})\left[\ln(a'+b) - \ln(a+b)\right]$$

$$- \frac{1}{\vartheta}\left\{\tilde{\mu}\left[\ln(a+b) - \ln(a+b')\right] + \tilde{g}\left[\ln(a'+b) - \ln(a+b)\right]\right\}^2 ,$$

en supposant toujours $\tau \neq 0$ et $\lambda \neq 0$.

En l'absence d'un mouvement propre (β=0), ces formules se simplifient beaucoup puisque alors $a = 1$ et $\tilde{g} = 0$, ce qui donne

$$_{\lambda}E(k)\cdot\vartheta = \tilde{\mu}\left[\ln(1+b) - \ln(1+b')\right] ,$$

$$_{\lambda}V(k)\cdot\vartheta = \frac{\tilde{\mu}}{2}\left[\frac{1}{(1+b')^2} - \frac{1}{(1+b)^2}\right]$$

$$+ \tilde{\mu}^2\left[\frac{1}{1+b} + \ln(1+b) - \frac{1}{1+b'} - \ln(1+b')\right]$$

$$- \frac{\tilde{\mu}^2}{\vartheta}\left[\ln(1+b) - \ln(1+b')\right]^2 .$$

S'il n'y a pas de temps mort, ces formules ne sont pas utilisables car elles conduiraient souvent à des expressions mal définies. Au lieu de chercher pour tout cas où cela arrive la valeur limite correcte, il est plus pratique de refaire les calculs en partant directement de l'hypothèse $\tau = 0$. Or, ces résultats sont déjà contenus dans le Rapport BIPM-79/11.

Les expressions données ci-dessus pour les moments ont pu être contrôlées pour un assez grand nombre de cas où ces moments étaient déterminés directement à partir de la répartition des nombres k, calculée par un programme d'ordinateur dont les éléments principaux seront décrits ailleurs. Dans tous les cas étudiés, l'accord entre évaluation directe et prévision théorique était excellent.

(Juillet 1979)